Title	絶対不分岐完備離散付値体の新しいアーベル拡大論(代数的整数論：最近の種々の話題について)
Author(s)	栗原, 将人
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 658: 17-33
Issue Date	1988-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/100554
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
658巻 1988年 17-33

絶対不分岐完備離散付値体の新しいアーベル拡大論

東大理　栗原将人

§0. 序

完備離散付値体の理論(分岐理論, 局所類体論など)については, Serre Corps locaux (以下[CL])に格調高くまとめられている。ただしそこでは主に剰余体が完全体という仮定の下に議論が進められており, この仮定をはずして議論を進めようとすると, たちまち困難が続出する。ここに述べるのは, このような剰余体非完全のときの完備離散付値体の理論を作ろうとする1つの試みから生まれたもので, 絶対不分岐な完備離散付値体(素数 p が付値環の極大idealの生成元)のアーベル拡大の様子は非常にsimpleでわかりやすく表される, ということを示すのが目標である.

K を離散付値で完備な体(henselでもよい), $\mathcal{O}_K$ を整数環, k を剰余体とする。K のアーベル拡大については, 剰余体 k が有限体のときに知られている局所類体論を拡張することによってその様子を知ろう という試みが多くなされてきた。

すなわち k が quasi-finite のとき (Whaples), 代数閉体のとき (Serre), 完全体のとき (Hazewinkel), 高次元局所体のとき (Kato) に局所類体論は拡張された。ここに述べようとするのは, このような局所類体論の拡張ではなく, K の絶対 Galois 群の指標群を次の条件の下, わかりやすく表そうとするものである.

(*) 奇素数 p が O_K の素元, すなわち $O_K/(p) = k$.

(特に剰余体には何の条件もつけないことに注意せよ)

たとえば arithmetic scheme $X/\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ が (p) のところで smooth のとき (p) で局所化, 完備化して得られる離散付値環を考えていると思えばよい。

この条件の下, K の絶対 Galois 群の指標群

$$H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

を考える。この群の ℓ-part $(\ell \neq p)$ はよくわかっているから (tamely ramified), 問題は p-part

$$H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \varinjlim H^1(K, \mathbb{Z}/p^n)$$

である。

Theorem (0.1) K の degree p^n の指標群から k の長さ n の Witt vectors の群 $W_n k$ へ基本写像

$$\Phi_n : H^1(K, \mathbb{Z}/p^n) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Z}/p^n) \longrightarrow W_n k$$

が構成できて (正確には §2 を見よ), この写像は全射, 核は不分岐指標全体の作る群となる。すなわち

(0.1.1) $0 \to H^1(k, \mathbb{Z}/p^n) \to H^1(K, \mathbb{Z}/p^n) \xrightarrow{\Phi_n} W_n k \to 0$

が exact。

（k が完全体のときとちがって、$W_n k$ は一般には $\mathcal{O}_K/p^n$ と同型ではないことに注意せよ。）

Remark (0.2) (＊) の条件の下では K の分岐理論は難しくなく，巡回拡大の剰余拡大は常に分離的である。従って (0.1.1) で，$W_n k$ は K の完全分岐巡回拡大と対応していることがわかる。剰余体 k の巡回拡大を K の拡大に持ち上げて、具体的に書くということは さまざまな人々によってなされているが，我々の話はこれとちがって，完全分岐拡大の様子を完全に記述しようとする話であることに注意しておく。

Remark (0.3) k が分離閉体のとき，(0.1.1) は同型 $H^1(K, \mathbb{Z}/p^n) \xrightarrow{\sim} W_n k$ となる。これは我々に Artin-Schreier-Witt theory を思い起こさせる (cf. 1.2.)。従って，$W_n k$ の各元に対し完全分岐巡回拡大を与える方程式を explicit に書けないか という疑問がおこる。

$n = 1$ に対しては，これは難しくない。$a \in k$ に対応する拡大の方程式は

$$T^p - T = \frac{\tilde{a}}{p} \qquad (\tilde{a} \text{ は } a \text{ の } \mathcal{O}_K \text{ への持ちあげ})$$

である。しかし，$n \geq 2$ に対しては今のところ何もわからない。$(1,0) \in W_2 k$ に対応する p^2 次巡回拡大は

$$\begin{cases} T_1^p - T_1 = \frac{1}{p} \\ T_2^p - T_2 = \frac{T_1}{p} \end{cases}$$

の根をすべてつけ加えて得られるものだと思われる程度である。

よく人に聞かれるので，つけ加えておくが，この定理の証明には加藤先生の高次元局所類体論は用いない。ただし，duality の考え方が重要な役割を果していることは，§2 に見る通りである。

以下 §1 で Galois cohomology の基本を述べた後，§2 で主結果を §3 で応用，§4 でこの理論の背景にある p-adic etale cohomology の理論について簡単に述べる。

§1. Galois cohomology に関する準備.

F を体，$G_F = Gal(\bar{F}/F)$ を F の絶対 Galois 群とする。G_F が連続に作用する discrete abel 群の category の中で，G_F－不変部分 M^{G_F} の右導来関手を $H^q(F, M)$ と書く。我々がここで興味を持つのは，特に $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)$（$(r)$ は Tate-twist，F の標数が $p > 0$ のときの p-part $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$ については 1.3. を見よ）である。

1.1. Kummer theory, canonical pairing h_q

n を F の標数と素な整数，μ_n を 1 の n 乗根全体のなす G_F-module とすると Kummer sequence

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \to 0$$

と Hilbert 90 から 次の同型が得られる。

(1.1.1) $\quad h_1 : F^\times/(F^\times)^n \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mu_n)$

$\mathbb{Z}/n(q)$ を Tate twist $\mu_n^{\otimes q}$ とすると (1.1.1) と cohomology の cup 積から canonical pairing

(1.1.2) $\quad h_q : (F^\times)^{\otimes q} \longrightarrow H^q(F, \mathbb{Z}/n(q))$

が定義される。一般に h_q は同型 $K_q^M(F)/n \xrightarrow{\sim} H^q(F, \mathbb{Z}/n(q))$ を induce すると予想される。($K_q^M(F)$ は q-th Milnor K群 [$(F^\times)^{\otimes q}$ の商]) 特に $q=2$，または $q=3, p=2$ のとき，この予想は正しい (Mercurjev-Suslin の定理)。また F が完備離散付値体のとき 常に正しい [K-1, B-K]。

1.2. Artin-Schreier-Witt theory [CL] p.163

F の標数を $p>0$ とする。W_nF を長さ n の Witt vectors の環 ([CL] II) とする。$\mathfrak{F}$ を W_nF の Frobenius $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \mapsto (a_0^p, \cdots, a_{n-1}^p)$ とすると 完全系列

$$0 \to \mathbb{Z}/p^n \to W_nF_{sep} \xrightarrow{\mathfrak{F}-1} W_nF_{sep} \to 0$$

の cohomology をとって

(1.2.1) $\quad W_nF/(\mathfrak{F}-1)W_nF \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mathbb{Z}/p^n)$

が得られる。

1.3. 標数 p の p 進 étale cohomology

X を標数 $p>0$ の体上の scheme とする。構造層 $\mathcal{O}$ に対し、Witt vectors のなす sheaf $W_n\mathcal{O}$ が定義できるが如く、X の De Rham complex $\Omega^\bullet$ に対し、理想的性質を持つ complex (De Rham-Witt complex とよばれる) $W_n\Omega^\bullet$ が定義される。$W_n\Omega^r$ の中で étale local に logarithmic differential form $d\log a_1\wedge\cdots\wedge d\log a_r$ で生成される subsheaf を $W_n\Omega^r_{\log}$ と書く。Illusie に従って $\mathbb{Z}/p^n(r)$ を $D(X_{et}, \mathbb{Z}/p^n)$ の中で

$$\mathbb{Z}/p^n(r) := W_n\Omega^r_{\log}[-r]$$

で定義する。特に $X = \mathrm{Spec}\, F$ のとき ($\mathrm{ch}\, F = p>0$)、完全系列

$$0 \to W_n\Omega^r_{\log} \to W_n\Omega^r \xrightarrow{F-1} W_n\Omega^r/dW_n\Omega^{r-1} \to 0$$

の cohomology をとって、(1.2.1) の一般化

(1.3.1) $$W_n\Omega^r_F/(dW_n\Omega^{r-1}_F + (F-1)W_n\Omega^r_F) \xrightarrow{\sim} H^{r+1}(F, \mathbb{Z}/p^n(r))$$

を得る。ここに $H^q(F, \mathbb{Z}/p^n(r))$ は $H^q((\mathrm{Spec}\, F)_{et}, \mathbb{Z}/p^n(r))$ の略。$r=0$ のとき (1.3.1) は (1.2.1) に他ならない。

さらに (1.1.1) に対応して

(1.3.2) $h_1 : F^\times \longrightarrow H^1(F, \mathbb{Z}/p^n(1)) = H^0_{et}(\mathrm{Spec}\, F, W_n\Omega^1_{log})$

$$a \longmapsto d\log a$$

が存在し，De Rham-Witt complex の積構造により

(1.3.3) $h_q : (F^\times)^{\otimes q} \longrightarrow H^q(F, \mathbb{Z}/p^n(q))$

が得られる。今度の場合，(1.3.3) は同型

$K_q^M(F)/p^n \xrightarrow{\sim} H^q(F, \mathbb{Z}/p^n(q))$ を induce することが知られている [B-K]。

以下では F の標数にかかわらず記号 $H^q(F, \mathbb{Z}/n(q))$ を使う。ch F = p > 0 のときの p-part の意味は上の通りである。

1.4. 完備離散付値体の cohomology

K を完備離散付値体，k を剰余体，ch k = p > 0 とする。

$$i_n^q : H^q(k, \mathbb{Z}/n(q-1)) \longrightarrow H^q(K, \mathbb{Z}/n(q-1))$$

を自然な写像（p-part については cf [K1]）として，O_K の素元 π を fix することにより準同型

(1.4.1) $\lambda^q_{n,\pi} : H^{q-1}(k, \mathbb{Z}/n(q-2)) \oplus H^q(k, \mathbb{Z}/n(q-1))$
$$\longrightarrow H^q(K, \mathbb{Z}/n(q-1))$$

を $(\alpha, \beta) \longmapsto i_n^{q-1}(\alpha) \cup h_1(\pi) + i_n^q(\beta)$

と定義する。ここに $i_n^{q-1}(\alpha) \cup h_1(\pi)$ は $i_n^{q-1}(\alpha) \in H^{q-1}(K, \mathbb{Z}/n(q-2))$ と $h_1(\pi) \in H^1(K, \mathbb{Z}/n(1))$ との cup 積。

(1.4.1) は n が p と素のとき同型となる。より一般に

<u>Th. (1.4.2)</u> $\lambda^q_{n,\pi}$ の Image は natural map

$$H^q(K, \mathbb{Z}/n(q-1)) \longrightarrow H^q(K_{nr}, \mathbb{Z}/n(q-1))$$

の核と一致する。ここに K_{nr} は K の最大不分岐拡大

(cf. [K2])

§2. 主結果

ここでは基本写像 Φ_n を定義する。以下 K を §0 の条件 (*) をみたす混標数の完備離散付値体とする。我々の興味の対象は Galois cohomology 群 $H^q(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q-1))$ である。これらの群は $H^q(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))$ の型の群の中で非常に重要である。

実際

$$H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{cont}(\mathrm{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$H^2(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \mathrm{Br}(K) \quad (K \text{ の Brauer 群})$$

さらに $H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ は K 上の斜体の被約 norm と密接な関係がある。

完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n(q-1) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q-1) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q-1) \longrightarrow 0$$

から生まれる cohomology sequence と (1.1.2) の全射性から

(2.1) $H^q(K, \mathbb{Z}/n(q-1)) = {}_nH^q(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q-1))$。

(${}_nA$ は A の中の n 倍の核)

従って torsion 群 $H^q(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q-1))$ を知るには $H^q(K, \mathbb{Z}/n(q-1))$ を知れば十分である。この ℓ-part ($\ell \neq p$) は

1.4. のようにわかっているから 問題は p-part だが (*) の条件の下ではこれが以下のように完璧にわかるのである。剰余体 k に対し $W_n\Omega^{\bullet}_{k}$ を De Rham-Witt complex とする。(cf. 1.3, [I])

<u>Theorem (2.2)</u> 次の条件をみたす全射準同型

$$\Phi_n : H^q(K, \mathbb{Z}/p^n(q-1)) \longrightarrow W_n\Omega^{q-1}_{k}$$

がただ1つ存在する。

「K'/K を $e_{K'/K}=1$ なる必ずしも有限次とは限らぬ完備離散付値体の拡大（従って p が $O_{K'}$ の素元）, k' を $O_{K'}$ の剰余体とする。このようなすべての K' に対して、次の図式が可換

$$(2.2.1)\quad \begin{array}{ccccc} H^q(K, \mathbb{Z}/p^n(q-1)) & \times & (K')^{\times}/p^n & \xrightarrow{①} & H^{q+1}(K', \mathbb{Z}/p^n(q)) \\ \Phi_n \downarrow & & \uparrow ④ & \circlearrowleft & \uparrow ② \\ W_n\Omega^{q-1}_{k} & \times & W_n k' & \xrightarrow[③]{} & \begin{array}{c} H^{q+1}(k', \mathbb{Z}/p^n(q)) \\ \oplus \\ H^q(k', \mathbb{Z}/p^n(q-1)) \end{array} \end{array}$$

ここに ① は $h_1 : (K')^{\times}/p^n \to H^1(K', \mathbb{Z}/p^n(1))$ と cup 積で定義される準同型

② は (1.4.1) における $\lambda^{q+1}_{p^n, p}$ （(1.4.1) で $\pi = p$, $q := q+1$, $n := p^n$ とおいたもの）

③ は $(\alpha, \omega) \mapsto ([p^{n-1}\alpha \cdot d\omega], [\omega \cdot \alpha])$, ここに

$\omega \in W_n\Omega^r_k$ に対し、$[\omega]$ は (1.3.1) による ω の像 $\in$ $H^{r+1}(k, \mathbb{Z}/p^n(r))$.

④ は $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \mapsto \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i} p^{i+j}\tilde{a}_i^{\,p^{n-i-j}}\right)$

($\tilde{a}_i$ は $a_i \in k'$ の $O_{K'}$ への持ち上げ)

さらに $H^q(K_{nr}/K, \mathbb{Z}/p^n(q-1)) = \mathrm{Ker}\left(H^q(K, \mathbb{Z}/p^n(q-1)) \longrightarrow H^q(K_{nr}, \mathbb{Z}/p^n(q-1))\right)$

(K_{nr} は K の最大不分岐拡大) とおくと Φ_n は

$$H^q(K, \mathbb{Z}/p^n(q-1))/H^q(K_{nr}/K, \mathbb{Z}/p^n(q-1)) \longrightarrow W_n\Omega^{q-1}_k$$

を経由し、$q=1$ のとき上は同型。$q>1$ のとき、このmapの核は $H^{q-1}(K, \mathbb{Z}/p^n(q-2))$ と $h_1(1+pO_K) \subset H^1(K, \mathbb{Z}/p^n(1))$ (h_1 は (1.1.1) に定義されたmap) とのcup積のimageに一致する。

Remark (2.2.2) Φ_n の特徴づけのためには K' として多項式環 $O_K[T]$ の (p) での局所化の完備化の商体をとれば十分である。

Remark (2.2.3) 図式 (2.2.1) を見れば Φ_n は map ④ の "dual" として定義されていることがわかる。ここに写像④の意味は syntomic chern class [G]

$$c_{1,1} : (O_{K'})^\times/p^n \longrightarrow H^1_{syn}(O_{K'}, S^1_n)$$

の逆写像を具体的に書いたものである。正確には

$$\begin{tikzcd}
(O_{K'}^{\times})/p^n \arrow[r, "c_{1,1}"] & H^1(O_{K'}, S_n^1) \\
& H^0_{dR}(\Omega^{\bullet}_{O_{K'}} \otimes \mathbb{Z}/p^n) = W_n k' \arrow[ul, "\circledast"] \arrow[u] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft", near end]
\end{tikzcd}$$

(cf. §4)

(2.3) Φ_n の n についての compatibility

$\mathbb{Z}/p^n(q-1) \to \mathbb{Z}/p^{n-1}(q-1)$, $\mathbb{Z}/p^{n+1}(q-1) \to \mathbb{Z}/p^n(q-1)$

という２つの canonical maps から induce される cohomology の準同型に対して次の可換図式が得られる。

(2.3.1)
$$\begin{tikzcd}
H^q(K, \mathbb{Z}/p^n(q-1)) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_n"'] & H^q(K, \mathbb{Z}/p^{n-1}(q-1)) \arrow[d, "\Phi_{n-1}"] \\
W_n\Omega_k^{q-1} \arrow[r, "F"'] & W_{n-1}\Omega_k^{q-1}
\end{tikzcd}$$

(2.3.2)
$$\begin{tikzcd}
H^q(K, \mathbb{Z}/p^n(q-1)) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_n"'] & H^q(K, \mathbb{Z}/p^{n+1}(q-1)) \arrow[d, "\Phi_{n+1}"] \\
W_n\Omega_k^{q-1} \arrow[r, "V"'] & W_{n+1}\Omega_k^{q-1}
\end{tikzcd}$$

ここに F, V は De Rham-Witt complex におけるふつうの operator, 特に Witt vector の環の上では

$F : (a_0, \cdots, a_{n-1}) \mapsto (a_0^p, \cdots, a_{n-2}^p)$

$V : (a_0, \cdots, a_{n-1}) \mapsto (0, a_0, \cdots, a_{n-1})$.

(2.4) $\Phi: H^q(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(q-1)) \longrightarrow \varinjlim_{V} W_n\Omega_k^{q-1}$

を Φ_n の順極限とする。 Φ は全射で 核 I は p-divisible。
その p-torsion ${}_pI$ は $B_\infty\Omega_k^{q-1}$ に同型となる。ここに
$B_\infty\Omega_k^{q-1}$ は $a^{p^m}\frac{da}{a}\wedge\frac{db_1}{b_1}\wedge\cdots\wedge\frac{db_{q-2}}{b_{q-2}}$ $(m \geqq 0)$ の型の
元で生成される Ω_k^{q-1} の部分群。

(2.5) 定理の証明で最も問題となるのは Φ_n の構成である。
Φ_1 は具体的に比較的容易に構成でき、Φ_n は帰納法により
一歩一歩構成していく。さらにこの構成のためには $K_2(K)/p^n$
の構造を完全に知ることも必要である。しかしここでは証明
については これ以上触れないことにする。

§3 応用.

(3.1) 三木博雄先生はすでに (*) をみたす K は特別の性
質を持つことを観察していた。

<u>Theorem</u> ([M] §6) K を §0 の (*) をみたす完備離
散付値体、L/K を p 次巡回拡大、$L(\zeta_p)/K(\zeta_p)$ は方程式
$T^p = 1 + (\zeta_p - 1)a$ で与えられているとする。ここに、
ζ_p は 1 の原始 p 乗根、$a \in O_K[\zeta_p]$。このとき L/K を含
む K の p^{n+1} 次巡回拡大が存在するための必要十分条件は
$\bar{a}$ を a の $k = O_K[\zeta_p]/(\zeta_p - 1)$ での像としたとき、$\bar{a} \in k^{p^n}$

である。

我々はこの定理を次のように説明できる。上の状況で χ を L/K に対応する指標とすると $\Phi_1(\chi)=\bar{a}\in\bar{k}$。この事実と可換図式 (2.3.1) により

$$\bar{a}\in\bar{k}^{p^n} \iff \exists\chi'\in H^1(K,\mathbb{Z}/p^{n+1})\ \text{s.t.}\ p^n\chi'=\chi$$

かくて上の定理が出る。実際 (2.3.1) は p^n 次巡回拡大から p^{n+1} 次巡回拡大にまでのびるための必要十分条件を与えていると考えられる。

(3.2) 三木先生の上記論文では次の有名な定理が述べられている。

<u>Theorem</u> K を混標数完備離散付値体，$\bar{k}$ を剰余体，$\bar{k}^{\infty}=\bigcap_{n\geq 0}\bar{k}^{p^n}$ を $\bar{k}$ の最大完全部分体，F を $\bar{k}^{\infty}$ を剰余体に持つ K の部分体で，K から induce される位相で完備な離散付値体，F の素元は K の素元でもあるとする。このとき K のすべての $\mathbb{Z}_p$-拡大は F の $\mathbb{Z}_p$-拡大と不分岐拡大の合成に含まれる。

K が (*) をみたすとき我々の定理を使えばこの証明は難しくない。実際，$\bar{k}$ は分離閉としてよく，このとき示すべきは，$H^1(\bar{k},\mathbb{Z}_p)\xrightarrow{\sim}H^1(K,\mathbb{Z}_p)$。しかし (2.3.1) により

これは $\varprojlim_F W_n(k^\infty) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_F W_n(k)$ から明らかである。なお筆者は K が(*)をみたさないときにも成立する同様の方針を使った上の定理の別証明を持っている。

(3.3) $q > 1$ なる q に対し $H^q(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(q-1))$ について考えてみよう。

Cor. (3.3.1). cup 積と h_{q-1} (cf. (1.1.21)) で定義される

$$H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes (K^\times)^{\otimes(q-1)} \longrightarrow H^q(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(q-1))$$

は全射，特に $Br(K)$ の p-part は cyclic algebra で生成される。

一般に すべての体 F に対し Brauer 群 $Br(F)$ は cyclic algebra で生成されると予想されるが，特別な体(代数体，1の巾根をすべて含む体，など)以外のときはわかっていない。

Cor. (3.3.2). $H^q(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(q-1))/H^q(K_{nr}/K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(q-1))$ は剰余体の p-base の個数が $q-1$ 個以上であれば，$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ の無限個の直和を含むほど大きい。

実際，$I = \mathrm{Ker}(\Phi : H^q(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(q-1))/H^q(K_{nr}/K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(q-1)) \longrightarrow \varinjlim W_n\Omega_k^{q-1}$ はこの条件をみたしている。この系は B. Roux 氏により $Br(K)$ に対して報告されたので，その一般化として

ここに述べたのである。

§4. 背景.

最近 Fontaine Messing [F-M], Faltings 等により、標数 0 の世界と標数 $p>0$ の世界をつなぐ理論が構成されつつある。すなわち X を混標数 $(0, p)$ の離散付値環上の variety としたとき、X の generic fiber の p 進表現と special fiber の crystal, あるいは generic fiber の etale cohomology と special fiber の crystalline cohomology との間の深い関係が明らかにされつつある。(これらについては本報告集内兵頭氏の稿を参照されたい。)

Fontaine と Messing は generic fiber の p 進 cohomology と special fiber の crystalline cohomology をつなぐため、その間をとりもつ syntomic cohomology $H^q_{syn}(X, S_n^r)$ を定義した。これは理想的に "$H^q_{et}(X, \mathbb{Z}/p^n(r))$" と見なされる群である。($\mathbb{Z}/p^n(r)$ は X 上 etale sheaf でないことに注意せよ。)

S_n^r の $D(X_{et}, \mathbb{Z}/p^n)$ への direct image を divided power や微分加群を使った complex で表すことにより ([K3])、この理論が generic fiber の etale cohomology $H^q_{et}(X_\eta, \mathbb{Z}/p^n(r))$ 自体の計算にも非常に役立つことがわかる。([Ku])

ただし syntomic cohomology がうまくいくのは $r \geqq q$ のと

まであり、我々のように $H^q(X_\eta, \mathbb{Z}/p^n(q-1))$ を知りたいときはこの理論はこのままでは使えない。一種の duality がここで必要なのである。

$X = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$, K は §0 の (*) をみたすとする。さらに剰余体 k の p-base の個数が $d-1$ 個であるとする ($[k:k^p] = p^{d-1}$)。このとき次の完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^d_{syn}(X, S_n^d) & \longrightarrow & H^d(K, \mathbb{Z}/p^n(d)) & \longrightarrow & H^{d-1}(k, \mathbb{Z}/p^n(d-1)) & \\ & \| & & & & \longrightarrow 0 & \\ & H^{d-1}_{DR}(\Omega^{\bullet}_X \otimes \mathbb{Z}/p^n) & & & & & \end{array}$$

が証明できる。(cf. [Ku])。この"dual"をとったものが、Th. (0.1) の完全系列となるのである。(正確には relatively perfect site の上で p-adic etale vanishing cycles の sheaf の duality が必要となる。)

ただし上の"duality"は未だ正確に証明されておらず、我々の定理 (0.1), (2.2) はこの§のような方法で証明するのではなく、syntomic cohomology の理論はまったく使わずに証明できる、ということを最後に注意しておく。

References

[B-K] Bloch, S. and Kato, K., p-adic etale cohomology Publ. Math. IHES, 63 (1986)

[F-M] Fontaine, J.-M., and Messing, W., p-adic periods and p-adic etale cohomology, Contem. Math 67 (1987)

[G] Gros, M., Régulateurs syntomiques, preprint

[I] Illusie, L., Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 12 (1979)

[K1] Kato, K., Galois cohomology of complete discrete valuation fields, in Lect. Notes in Math 967

[K2] Kato, K., Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case, to appear in Contem. Math.

[K3] Kato, K., On p-adic vanishing cycles, Adv. Studies in Pure Math. 10 (1987)

[Ku] Kurihara, M., A note on p-adic etale cohomology, Proc. Japan. Acad. 63 (1987)

[M] Miki, H., On $\mathbb{Z}_p$-extensions of complete p-adic power series fields and function fields, J. Univ. Tokyo (1974)

[CL] Serre, J.-P., Corps locaux, Hermann, Paris.